

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

**Lucas Morethes Mansur**

**$g_\mu - 2$  na eletrodinâmica quântica**

São Carlos, 2022



**Lucas Morethes Mansur**

## **$g_\mu - 2$ na eletrodinâmica quântica**

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia apresentado ao Curso de graduação em Física na habilitação Teórico-Experimental no Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito

**SÃO CARLOS - SP**

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Mansur, Lucas Morethes  
 $g_{\mu}$  - 2 na eletrodinâmica quântica / Lucas Morethes  
Mansur; orientador Diogo de Oliveira Boito -- São Carlos,  
2022.  
27 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) --  
Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São  
Paulo, 2022.

1. Teoria quântica de campos. 2. Eletrodinâmica  
quântica. 3.  $g_{\mu}$  - 2. I. Boito, Diogo de Oliveira, orient.  
II. Título.

# Resumo

O momento magnético anômalo do mûon,  $g_\mu - 2$ , é um observável fundamental da física de partículas. A previsão da equação de Dirac,  $g_\mu = 2$ , recebe pequenas correções quânticas — advindas da troca de partículas virtuais — no contexto do Modelo Padrão. Com a medida experimental recente de  $g_\mu - 2$  do mûon feita pela colaboração *Muon g - 2*, no Fermilab, este observável mostra agora uma tensão de  $4.2\sigma$  em relação às previsões do Modelo Padrão. Entender a origem desta discrepância é um importante problema da física atual, que requer a revisão e análise detalhada da incerteza teórica dos cálculos envolvendo as correções no valor de  $g_\mu - 2$ . O presente trabalho dedica-se a estudar e reproduzir os resultados clássicos para  $g_\mu - 2$  da Equação de Dirac e da primeira correção obtida na eletrodinâmica quântica, calculada por Julian Schwinger em 1948.

Palavras-chave: Teoria quântica de campos. Eletrodinâmica quântica.  $g_\mu - 2$ .



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b><math>g_\mu = 2</math> via Mecânica Quântica Relativística</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>A Eletrodinâmica Quântica (QED)</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Correção de ordem <math>\alpha</math> para <math>g_\mu - 2</math> na QED</b>	<b>15</b>
4.1	Correções Radiativas na QED: Fótons Virtuais . . . . .	15
4.2	Cálculo da Correção de um <i>Loop</i> do Vértice do Múon . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>26</b>
	<b>Referências</b>	<b>27</b>



# 1 Introdução

O momento magnético do múon desempenha, historicamente, um papel importantíssimo no estabelecimento da Eletrodinâmica Quântica (QED) — e do Modelo Padrão (SM) como um todo — como uma teoria sólida e capaz de fazer previsões refinadas na física de partículas. A descrição clássica para o momento magnético,  $\mu$ , de uma partícula elementar de carga  $e$  e spin  $S$ , é dada por (em unidades naturais,  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ )

$$\mu = g \frac{e}{2m} S, \quad (1)$$

onde  $g$  é o fator giromagnético da partícula e  $m$  a sua massa. Paul Dirac previu,<sup>1</sup> em 1928, com o desenvolvimento da Mecânica Quântica Relativística (MQR),  $g = 2$  para o elétron (e consequentemente para todas as partículas elementares de spin 1/2), que certificava os resultados experimentais da época e representava um grande salto comparado ao formalismo anterior da Mecânica Quântica Não Relativística.

Com o advento da Teoria Quântica de Campos (TQC), o fator  $g$  passa a apresentar correções finas, provenientes das trocas de partículas virtuais previstas no escopo da QED. Para os léptons carregados ( $\ell = e, \mu$  e  $\tau$ ), defini-se o momento magnético anômalo, que nada mais é do que o desvio relativo de  $g$  em relação a sua previsão da MQR,

$$a_\ell = \frac{g_\ell - 2}{2}. \quad (2)$$

A primeira correção a  $g_\ell - 2$  (então calculada para o elétron), advinda da QED, foi calculada por Julian Schwinger em 1948.<sup>2</sup> No mesmo ano, P. Kusch e H. M. Foley confirmaram experimentalmente o resultado de Schwinger,<sup>3</sup> mostrando a incrível capacidade da QED em calcular com grande precisão importantes observáveis da física. Desde então,  $g_\ell - 2$  mostra-se uma ferramenta poderosa na busca por novas interações e física além do SM.

Recentemente, a colaboração *Muon g - 2* efetuou uma série de medidas para  $a_\mu$ , o momento magnético anômalo do múon, no Fermilab (FNAL), laboratório de física de altas energias no USA, indicando um desvio

$$\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{(\text{Exp})} - a_\mu^{(\text{SM})} = (251 \pm 59) \times 10^{-11}, \quad (3)$$

que representa uma tensão  $4.2\sigma$  em relação à previsão do SM,<sup>4</sup> como indica a Figura 1. Entender a origem desta discrepância é um importante problema da física atual, que requer a revisão e análise detalhada da incerteza teórica dos cálculos envolvendo as correções no valor de  $g_\mu - 2$ . No mais, em não havendo problemas nos cálculos do SM, o resultado passaria a apresentar forte indício de uma nova física, possivelmente ligada a efeitos de partículas mais massivas nunca

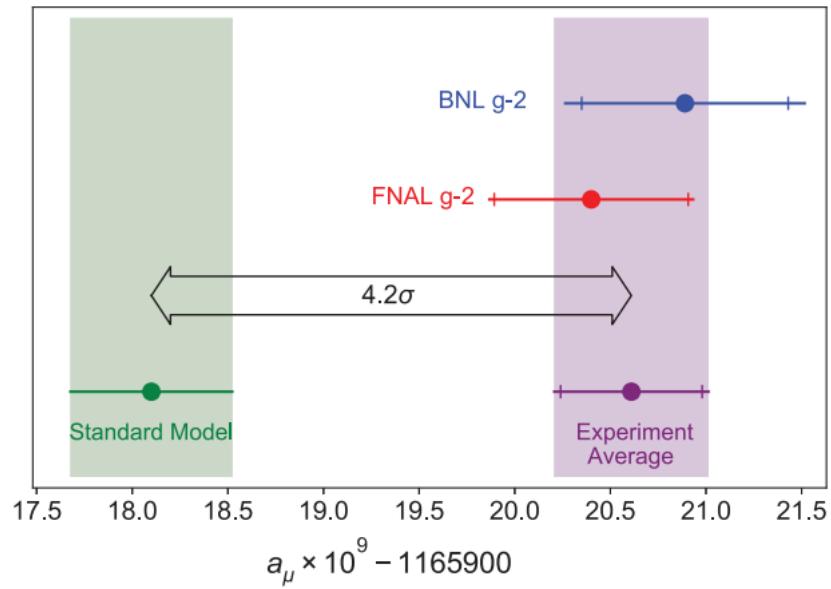


Figura 1 – Tensão entre o resultado experimental do *Muon g – 2* e a previsão do SM para *g – 2*.  
Fonte: ABI *et al.*<sup>4</sup>

observadas, tais como alguns candidatos à matéria escura, por exemplo.

Motivados por esse intrigante resultado experimental e sua importância para a física de partículas atualmente, o presente trabalho dedica-se a revisitar e reproduzir os resultados clássicos de  $g_\mu = 2$  proveniente da Equação de Dirac e da primeira correção advinda da QED para  $g_\mu - 2$ .

## 2 $g_\mu = 2$ via Mecânica Quântica Relativística

Dentro do escopo da Mecânica Quântica Relativística, o tratamento de partículas fermiônicas de spin 1/2 é feito através da Equação de Dirac, que na forma livre ( $V(x) = 0$ ) é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (4)$$

em que  $\psi$  é o espinor de quatro componentes e  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac ( $4 \times 4$ ), cujas expressões são dadas, na chamada base quiral, em blocos  $2 \times 2$ , por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

em que  $I$  é a matriz identidade e  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli usuais.

O interesse nesta seção é estudar a interação de uma partícula carregada de carga  $e$  com o campo eletromagnético clássico (não quantizado). A introdução dessa interação na Equação de Dirac é feita da seguinte maneira: adotando a assinatura da métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  e o sistema natural de unidades ( $\hbar = 1$  e  $c = 1$ ) <sup>1</sup>, o quadripotencial eletromagnético é dado por

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (6)$$

de forma que efetuando a substituição de acoplamento mínimo,  $\partial_\mu \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)$ , <sup>5</sup> insere-se na Eq. (4) a dependência com o campo eletromagnético. Encontramos então

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0, \quad (7)$$

que é a equação que descreve a interação desejada, relativisticamente.

Para resolver a Eq. (7), é conveniente adotar o *ansatz*

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} e^{-iEt}, \quad (8)$$

no qual  $\Psi_\pm$  representam os espinores de Pauli, de duas componentes, uma forma conveniente para fazer contato com a versão não relativística da MQ, e  $E$  a energia de repouso da partícula em questão. Com isso, aplicando (8) na eq. de Dirac, encontra-se o conjunto de duas equações acopladas da forma

$$(E - m - e\phi)\Psi_+ + \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\Psi_- = 0, \quad (9)$$

$$(E + m - e\phi)\Psi_- + \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\Psi_+ = 0, \quad (10)$$

---

<sup>1</sup>Utilizaremos essa convenção de métrica e sistema de unidades durante todo o trabalho.

e desejamos resolvê-las para os spinores  $\Psi_+$  e  $\Psi_-$ .

Antes de partir para a solução, é possível analisar os termos encontrados sob uma ótica não-relativística. No limite de baixas velocidades, a energia de repouso da partícula é muito maior que sua energia cinética ( $p^2/2m \ll m$ ) e a contribuição coulombiana advinda do potencial escalar,  $e\phi$ , também é desprezível quando comparada com a componente de repouso. Isso traz implicações interessantes, de forma que simplifica-se o termo entre parênteses Eq. (10) como

$$E + m - e\phi \approx 2m, \quad (11)$$

que leva a facilmente resolver o conjunto acoplado de equações isolando

$$\Psi_- = -\frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\Psi_+, \quad (12)$$

o que possibilita substituir  $\Psi_-$  na Eq. (9), encontrando

$$(E - m)\Psi_+ - \left( \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})]^2 + e\phi \right) \Psi_+ = 0. \quad (13)$$

Ainda é possível trabalhar um pouco a Eq. (13) utilizando algumas propriedades das operações com as matrizes de Pauli. Dado um operador  $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ , a identidade<sup>5</sup>

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2 = \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{\pi}} \times \hat{\boldsymbol{\pi}}) \quad (14)$$

permite reescrever o primeiro termo dos parênteses na Eq. (13), e sendo o campo magnético  $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$  e o operador momento da mecânica quântica  $\hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ , a Eq. (13) pode ser reescrita convenientemente como

$$\left( \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 + e\phi - \frac{e}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) \right) \Psi_+ = (E - m)\Psi_+, \quad (15)$$

que pode ser resolvida para  $\Psi_+$  e encontram-se as soluções para a equação de Dirac na aproximação correspondente. Entretanto, é possível extrair interpretações interessantes no limite que estamos estudando: a expressão encontrada na Eq. (15) nada mais é do que a Hamiltoniana de Pauli independente do tempo, já conhecida da mecânica quântica não relativística, em que as duas componentes de  $\Psi_+$  são as soluções para os dois graus de liberdade de spin da partícula fermiônica.<sup>5</sup>

Analizando com maiores detalhes, a equação de Pauli descreve um hamiltoniano clássico do campo eletromagnético atuando em uma partícula de carga  $e$ , mais um termo que representa um hamiltoniano de interação do campo magnético  $\mathbf{B}$  com uma quantidade vetorial proporcional a

$\sigma$ . Ora, sabendo que no formalismo dos férmiões escreve-se o spin das partículas como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (16)$$

então a hamiltoniana da interação com o campo magnético pode ser descrita através de

$$H_{int} = -\frac{e}{m} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}), \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m} \mathbf{S}, \quad (17)$$

em que  $\boldsymbol{\mu}$  é o momento de dipolo magnético da partícula estudada.

Por simples comparação entre o resultado esperado clássico na Eq. (1) e o calculado através do formalismo da MQR na Eq. (17), no limite de baixas velocidades, encontra-se o fator  $g$  para o múon (o mesmo para os demais léptons carregados) como

$$g_\mu = 2, \quad (18)$$

que é o famoso resultado obtido por Paul Dirac,<sup>1</sup> e que historicamente demonstrou o poder da MQR perante aos formalismos anteriores, visto que além de explicar o surgimento do spin e também a existência de anti-partículas na física, demonstrou o valor esperado para  $g$ , o qual já se sabia, de maneira semi-empírica, ser aproximadamente igual a dois na época que Dirac publicou seu trabalho.

### 3 A Eletrodinâmica Quântica (QED)

Como comentado, as correções finas no valor de  $g_\mu$  advêm das interações calculadas dentro do escopo da Teoria Quântica de Campos. Esta por sua vez, diferentemente dos formalismos na Mecânica Quântica, tem a dinâmica construída através de lagrangianas descritas em termos de campos quantizados (e suas derivadas), e não através de potenciais de interação obtidos externamente à teoria. Neste trabalho, em particular, estamos interessados nas correções advindas da Eletrodinâmica Quântica, formalismo da TQC que trata das interações entre fôtons, excitações quânticas do campo eletromagnético, e as partículas fermiônicas de spin 1/2. Para isso, precisamos construir a lagrangiana que rege esse formalismo, para que então sejamos capazes de calcular os processos que envolvem  $g_\mu - 2$  dentro desse escopo.

A lagrangiana que descreve o campo livre das partículas de spin 1/2 é

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (19)$$

onde  $\psi$  e  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$  representam campo e o campo adjunto de Dirac, respectivamente, que serão quantizados. No contexto da TQC,  $\psi$  não é mais uma função de onda, e sim um operador capaz de criar e destruir estados de partículas. Através da Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0, \quad (20)$$

encontramos a equação de movimento para os férmons

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0, \quad (21)$$

em que usamos a notação de Feynman,  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$ , e que é justamente a Equação de Dirac da MQR. Nota-se, portanto, que a lagrangiana da Eq. (19) recupera a expressão dinâmica para as partículas fermiônicas de spin 1/2. Porém, precisamos inserir na lagrangiana um termo que envolva a interação dos férmons com o campo eletromagnético, agora necessariamente quantizado no escopo dessa teoria. Para isso, o mecanismo consagrado na literatura para a construção da interação na QED é a invariância de *gauge* (ou calibre) local, que passamos a discutir a seguir.

A lagrangiana da Eq. (19) possui invariância por transformação de fase  $U(1)$  global, isto é, a substituição

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) \equiv e^{ie\theta}\psi(x) \quad (22)$$

não altera a Equação de Dirac, com  $\theta$  uma fase real e constante. Porém, isso deixa de ser verdade quando  $\theta$  torna-se uma função das coordenadas do espaço-tempo, isto quer dizer que

a lagrangiana da Eq. (19) não é invariante por transformação  $U(1)$  local, já que a derivada modifica-se para

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow (\partial_\mu \psi)'(x) \equiv [\partial_\mu + ie\partial_\mu \theta(x)] e^{ie\theta(x)} \psi(x). \quad (23)$$

A ideia para se construir o termo de interação na lagrangiana é promover a invariância global para local, efetuando as mudanças necessárias na derivada da Eq. (19) para que isso se torne verdade. O termo extra que surge na derivada da Eq. (23) pode ser corrigido adicionando um campo de gauge de spin 1,  $A_\mu(x)$ , que se transforma como<sup>6</sup>

$$A_\mu(x) \rightarrow (A_\mu)'(x) \equiv A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x), \quad (24)$$

e definindo uma derivada covariante, com respeito a transformação de  $U(1)$  local,

$$D_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x), \quad (25)$$

a qual se transforma apenas com uma fase, assim como  $\psi$  na Eq. (22). Com isso, podemos reescrever a lagrangiana da Eq.(19) como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (26)$$

que agora possui simetria  $U(1)$  local e inclui um termo de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (27)$$

que sugere a interpretação do campo de gauge quantizado  $A_\mu$  como o campo do fóton: uma partícula de spin 1 e sem massa que interage com os férmons. Para que isso seja possível,  $A_\mu$  deve ser um campo dinâmico, o que exige adicionar à lagrangiana um termo cinético para esse campo<sup>6</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad (28)$$

em que  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor eletromagnético.

Assim, encontramos a lagrangiana da QED, invariante por trans. de gauge locais, como

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \quad (29)$$

que rege as interações de férmons e fótons na TQC e permite determinar as contribuições finas em  $g_\mu - 2$  proveniente da Eletrodinâmica Quântica. Porém, fazer esses cálculos diretamente da lagrangiana não é tão simples: dentro da Representação de Interação (também conhecida como Representação de Dirac), defini-se o operador de evolução temporal dos estados quânticos como uma função da lagrangiana de interação da teoria, o que permite escrever um estado no tempo

através de uma solução iterativa, conhecida como Série de Dyson. Com os campos escritos em termos dos operadores de criação e destruição, e definidos os estados inicial e final de um processo na QED, calcula-se a amplitude do evento através de um trabalho árduo envolvendo contrações dos operadores na Série de Dyson com os estados das partículas, o que estende consideravelmente os cálculos das amplitudes na QED.<sup>7</sup>

Felizmente, há um mecanismo brilhante, desenvolvido pelo também brilhante físico Richard Feynman, que consiste em calcular os processos da QED via Diagramas e Regras de Feynman: desenhos esquemáticos que representam as interações, e que podem ser associados a um conjunto de regras que ligam os elementos dos diagramas a termos da equação que descreve a amplitude do processo. Começamos associando, para cada linha interna e externa do desenho, um quadrimomento com sentido definido para o fluxo das partículas, de forma que em cada vértice do diagrama, possamos impor a conservação de momento. Feito isso, as regras de Feynman na QED são obtidas diretamente da lagrangiana da Eq. (29), e podem ser resumidas como<sup>7</sup>

1. Para as linhas externas, incluir

$$\text{férmion} \begin{cases} \text{inicial : } u(p) \\ \text{final : } \bar{u}(p') \end{cases}, \quad \text{antiférmion} \begin{cases} \text{inicial : } \bar{v}(p) \\ \text{final : } v(p') \end{cases}, \quad \text{fótons} \begin{cases} \text{inicial : } \epsilon_\mu(p) \\ \text{final : } \epsilon_\mu^*(p') \end{cases},$$

em que  $u$  e  $v$  representam os espinores de Dirac para partículas e antipartículas, respectivamente, e  $\epsilon_\mu$  a polarização do fóton, que é a contração do campo  $A_\mu$  com os estados externos, com seus momentos  $p$  e  $p'$  entrando e saindo do diagrama, respectivamente;

2. Para cada vértice, adicionar  $(-ie\gamma^\mu)$ , conhecido como Vértice Fundamental da QED.
3. Para linhas internas de quadrimomento  $p$ , que representam os propagadores da teoria, incluir

$$\text{férmion} : i \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \text{fóton} : -i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}; \quad (30)$$

onde  $\epsilon \rightarrow 0$  é a Prescrição de Feynman para tratar as singularidades no denominador;

4. Integrar sobre cada momento de *loop* interno do diagrama;
5. O resultado será  $i\mathcal{M}$ , onde  $\mathcal{M}$  é a amplitude do processo descrito pelo diagrama.

Vale ressaltar que é importante seguir a ordem acima para evitar resultados errados para a amplitude do processo. Uma forma segura de se ler um diagrama de Feynman é seguir as linhas que representam os férmions e percorrê-la no sentido contrário ao fluxo da partícula, representado pela direção da seta.<sup>7</sup> Definidas as regras de Feynman, estamos aptos a calcular os processos da QED que contribuem em  $g_\mu - 2$ . Porém, antes, precisamos verificar quais diagramas contribuem ao momento anômalo do mísion, e como extrair as correções de suas respectivas amplitudes.

## 4 Correção de ordem $\alpha$ para $g_\mu - 2$ na QED

### 4.1 Correções Radiativas na QED: Fótons Virtuais

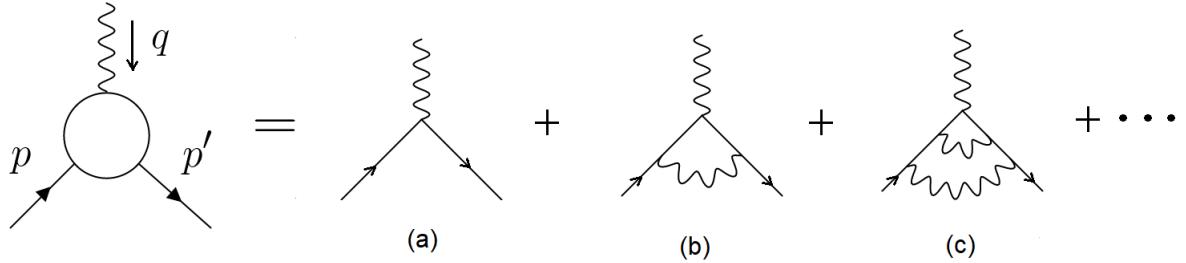


Figura 2 – Interações do  $\mu$ , indicado pelas linhas cheias de momento  $p$  e  $p'$ , com o campo eletromagnético, indicado pelas linhas onduladas (fótons). O círculo branco representa todas as possíveis interações. Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos considerar os diagramas da Figura 2, que representam a interação do mísion com um campo eletromagnético externo, em ordem mais baixa (a) e dois exemplos de interações geradas por diagramas de *loops*. Os diagramas em (b) e (c) são exemplos das chamadas correções radiativas na QED, e são provenientes da troca de fótons virtuais pela partícula carregada. Em outras palavras, o fenômeno pode ser interpretado como a auto-interação do mísion com o próprio campo gerado por sua carga, que emite e reabsorve os fótons, o que pode contribuir significativamente para uma variedade de observáveis, em específico o momento magnético anômalo, como demonstraremos a seguir.

Uma forma interessante de estudar o processo descrito na Figura 2 é considerando, inicialmente, a interação dos férnions com os fótons externos fora da camada de massa, isto é, tomando o quadrimomento do fóton incidente não necessariamente como  $q^2 = 0$ . A grande vantagem disso é tratar o problema da forma mais geral possível, o que não nos impede de utilizar as regras de Feynman associadas à QED normalmente. Com todo o processo da Figura 2 descrito de forma generalizada, voltaremos a tomar as condições da camada de massa para as interações que desejamos observar.

Dito isso, a amplitude dos processos descritos na Figura 2 é dada por  $\mathcal{M}^\mu \epsilon_\mu$ , onde  $\epsilon_\mu$  é o vetor de polarização associado ao fóton externo do vértice, e  $\mathcal{M}^\mu$  é um termo que pode ser escrito convenientemente como<sup>8</sup>

$$i\mathcal{M}^\mu = -ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p', p)u(p), \quad (31)$$

em que  $\bar{u}(p')$  e  $u(p)$  são os espinores associados aos mísions espalhados, e  $\Gamma^\mu(p, p')$  é uma estrutura geral que parametriza toda a informação das auto-interações ligadas à Figura 2. Podemos restringir o formato de  $\Gamma^\mu(p, p')$  utilizando argumentos de simetria da QED e a

invariância de Lorentz.

Para começar,  $\Gamma^\mu$  deve ser uma combinação linear dos quadrivetores disponíveis, que são  $\gamma^\mu$ ,  $p^\mu$ ,  $p'^\mu$  e  $q^\mu$ , além de constantes fundamentais como  $m$  e  $e$ , podendo ser escrito em sua forma geral como

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu A + p^\mu B + p'^\mu C + q^\mu D, \quad (32)$$

com  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  funções escalares de Lorentz que podem envolver produtos das matrizes de Dirac e vetores, como  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ . Entretanto, pela equação de Dirac

$$\begin{aligned} \not{p}u(p) &= mu(p), \\ \bar{u}(p')\not{p}' &= m\bar{u}(p'), \end{aligned} \quad (33)$$

e podemos escrever as variáveis  $\not{p}$  e  $\not{p}'$  apenas em termos da massa  $m$ . Além disso, com a conservação do momento,  $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ , podemos tomar  $D = 0$ , fazendo com que o único escalar possível e não trivial (além das constantes  $m$  e  $e$ ) que pode compor os coeficientes da Eq. (32) seja  $q^2 = (p' - p)^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$ .

Outra simplificação que podemos fazer é através da Identidade de Ward<sup>7</sup>

$$q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0, \quad (34)$$

a qual afirma que o termo da amplitude  $\mathcal{M}^\mu$  é zero quando contraído com o quadrimomento do fóton externo  $q_\mu$ . Logo, multiplicando toda a Eq. (32) por  $q_\mu$

$$q_\mu \Gamma^\mu = q_\mu \gamma^\mu A + q_\mu p^\mu B + q_\mu p'^\mu C = 0, \quad (35)$$

e, utilizando a Equação de Dirac, tem-se  $q_\mu \gamma^\mu = 0$ , portanto, os termos que acompanham  $B$  e  $C$  são os únicos não diretamente nulos. Usando

$$q \cdot p = p' \cdot p - m^2 = -q \cdot p', \quad (36)$$

tem-se  $B = C$ , reduzindo o formato de  $\Gamma^\mu$  a apenas duas funções escalares de Lorentz.

Usando a Identidade de Gordon, podemos substituir  $(p + p')$  na expressão de  $\Gamma^\mu$  em favor de<sup>7</sup>

$$\bar{u}(p') \left[ \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} \right] u(p) = \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p), \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (37)$$

tornando todo o termo  $\Gamma^\mu$  função apenas de  $\gamma^\mu$  e  $q^\mu$ . Portanto, a Eq. (32) pode ser escrita, de maneira totalmente geral, como

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (38)$$

onde  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  são chamados de Fatores de Forma, expressões escalares que acompanham as estruturas de Lorentz  $\gamma^\mu$  e  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ , respectivamente, e carregam, portanto, todas as informações do termo da amplitude descrito pela Eq. (31).

Vamos verificar agora como os Fatores de Forma se conectam com o momento magnético anômalo do mûon. Como observado na Hamiltoniana de Pauli, Eq. (15), a aproximação não relativística para a solução da Equação de Dirac leva, naturalmente, ao surgimento do fator  $g$  em um termo acoplado ao spin da partícula,  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$ . No contexto da Teoria Quântica de Campos, os resultados para a amplitude do processo que estamos calculando estão dentro do escopo relativístico, portanto, para extraímos as correções em  $g$ , procuramos termos necessariamente acoplados a  $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ , o que nos permite identificar onde há a dependência com o spin da partícula.

Em ordem mais baixa, o fenômeno descrito é apenas um espalhamento de Rutherford usual, dado pela interação do mûon com o campo externo. Sendo nesse caso  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ , então os fatores de forma em ordem mais baixa assumem os valores  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 0$ , obrigatoriamente. Assim, usando a Identidade de Gordon mais uma vez, escrevemos  $\mathcal{M}^\mu$  em ordem 0 como

$$\mathcal{M}_0^\mu = -e \left( \frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} \right) \bar{u}(p') u(p) - i \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p), \quad (39)$$

que deve reproduzir  $g_\mu = 2$  proveniente da Eq. de Dirac. Ora, pelo argumento anterior que nos permite identificar  $g_\mu$  acoplado ao termo de spin, o fator giromagnético pode ser interpretado como  $4m/e$  vezes o coeficiente que acompanha  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ , indicando que  $F_1(q^2)$  é o fator responsável por recuperar o resultado esperado da MQR.<sup>8</sup>

Entretanto, note que o  $F_1(q^2)$  é capaz de modificar o vértice fundamental da teoria, o qual provém do acoplamento do fôton na QED,  $eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , que é fixo nesse contexto e não deve ser alterado pelos fatores de forma, em nenhuma ordem de interação. De fato,  $F_1(q^2)$  desempenha o papel de um fator escalar que multiplica  $e$  no acoplamento, sendo relevante apenas no processo de renormalização da carga.<sup>8</sup> Com isso, o fator de forma  $F_1(q^2)$  é fixado à unidade em todas as ordens de interação da Figura 2, e não deve contribuir às correções de  $g_\mu - 2$ .<sup>7</sup>

Através dessa observação, e pela estrutura geral de Lorentz na Eq. (38), o fator de forma  $F_2(q^2)$  é o verdadeiro responsável pelas correções de  $g_\mu$  em ordens superiores ao espalhamento de Rutherford. Tratando-se de um observável em que os fôtons externos interagem com os férmons na camada de massa ( $q^2 = 0$ ), o fator giromagnético para o mûon passa a ser expresso como

$$g_\mu = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0), \quad (40)$$

reduzindo nossa análise a calcular apenas  $F_2(0)$ , que é diferente de zero para os diagramas de loop na Figura 2.

Assim, nosso trabalho agora é dedicado a encontrar a primeira correção a  $g_\mu - 2$ , em ordem  $\alpha$  (a constante de estrutura fina), através da amplitude dos diagramas na Figura 2, que pode

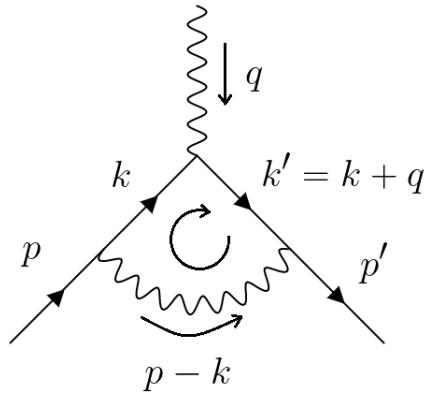


Figura 3 – Diagrama de Feynman de vértice do mísion. A seta semi-circular indica o fluxo de momento  $k$  dentro do loop.

Fonte: Elaborada pelo autor.

ser expressa por

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu, \quad (41)$$

onde  $\gamma^\mu$  é o espalhamento de Rutherford (ordem  $\alpha^0$ ) do diagrama (a), e  $\delta\Gamma^\mu$  é a contribuição proveniente da análise do vértice em (b) da Figura 2, o qual iremos calcular a seguir.

## 4.2 Cálculo da Correção de um *Loop* do Vértice do Mísion

Aplicando as Regras de Feynman no diagrama da Figura 3, o fator  $\delta\Gamma^\mu$  é dado por

$$\delta\Gamma^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \bar{u}(p') \gamma^\nu \frac{(k' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{(k + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\rho u(p). \quad (42)$$

As integrais desse tipo são conhecidas como integrais de *loop*, e aparecem quando há nos diagramas uma estrutura em formato de laço (quando há 3 ou mais vértices de interação), percorridas por um momento interno,  $k$ , da troca de partículas virtuais. Para resolver essa integral, primeiramente, podemos simplificar a expressão para o denominador através da Parametrização de Feynman. Esse método consiste em reescrever os três fatores da Eq. (42) como

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3}, \quad (43)$$

em que  $x, y, z$  são os Parâmetros de Feynman, os quais simplificam a expressão tornando o denominador

$$D = k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon, \quad (44)$$

em que usamos  $x+y+z=1$  e  $k'=k+q$  para reescrevê-lo.

Agora, fazemos a mudança de variável  $k \rightarrow l$ , completanto o quadrado em  $D$  para

$$l \equiv k + yq - zp \Rightarrow D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \quad (45)$$

no qual

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1 - z)^2 m^2 \quad (46)$$

é uma função em termos da massa do mísion,  $m$ . Note que a parametrização da integral em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , permitiu reescrever o denominador eliminando termos lineares na nova variável de integração, o que facilita o prosseguimento do cálculo.

O numerador na Eq. (42), em termos agora de  $l$ ,

$$N = \bar{u}(p')[\gamma^\nu(l + (1 - y)\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu(l - y\not{q} + z\not{p})\gamma_\nu]u(p) \quad (47)$$

apresenta termos lineares e quadráticos na nova variável. Pela contagem do número de potências do denominador, no máximo  $l^3$ , há uma divergência no ultravioleta (momentos altos em  $l$ ) na integral que estamos trabalhando.<sup>7</sup>

Há diversas formas de interpretar as divergências presentes em algumas integrais de *loop*. Uma delas consiste em associar o problema às dimensões do espaço de integração: se efetuássemos os cálculos em um espaço de dimensão  $d < 4$ , a integral seria finita e apresentaria a convergência desejada.<sup>9</sup> Estamos interessados nos resultados para um observável da física,  $g_\mu - 2$ , portanto, divergências não devem aparecer em nossos resultados.

Utilizar um mecanismo que permita tratar esse problema se torna crucial, e desde já adotaremos uma prescrição para isolar a divergência na integral da Eq. (42), conhecida como Regularização Dimensional (Reg. Dim.). Essa prescrição, proposta inicialmente por G. 't Hooft e M. Veltman em 1972,<sup>9</sup> consiste em calcular o diagrama da Figura (3) em um espaço  $d$  dimensional, com 1 dimensão temporal e  $(d - 1)$  espaciais, de forma que

$$d = 4 - 2\epsilon, \quad (48)$$

onde no limite que queremos,  $d \rightarrow 4$ , tem-se  $\epsilon \rightarrow 0$ , nos permitindo isolar a divergência, convenientemente, em termos que envolvem polos em  $\epsilon$ .

Para usarmos Reg. Dim., é necessário tratar a álgebra de Dirac para as matrizes  $\gamma^\mu$  em um novo espaço de  $d$  dimensões, o que claramente modifica as identidades usuais e seus traços. Através da contração

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \cdot I, \quad (49)$$

as novas identidades para a álgebra de Dirac em  $d$  dimensões são

$$\begin{aligned}\gamma^\nu \not{q} \gamma_\nu &= -2\not{q} + (4-d)\not{q}, \\ \gamma^\nu \not{q} \not{p} \gamma_\nu &= 4(ab) - (4-d)\not{q} \not{p}, \\ \gamma^\nu \not{q} \not{p} \not{q} \gamma_\nu &= -2\not{q} \not{p} \not{q} + (4-d)\not{q} \not{p} \not{q},\end{aligned}\tag{50}$$

que permitem calcular as contrações na Eq. (47). Porém, algumas identidades podem simplificar ainda mais o numerador da nossa integral. Primeiramente, podemos utilizar<sup>7</sup>

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu}{D^3} = 0,\tag{51}$$

que vem diretamente da paridade ímpar no numerador  $l \rightarrow -l$ , enquanto os demais termos são pares em relação a  $l$ , levando a zero integral e permitindo descartar os termos lineares em  $l^\mu$ . Uma segunda expressão que auxilia a simplificação é

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\frac{1}{d} g^{\mu\nu} l^2}{D^3},\tag{52}$$

que decorre dos mesmos argumentos de simetria: se  $\mu \neq \nu$ , a integral é zero. Porém, no caso em que  $\mu = \nu$ , podemos substituir o produto em termos da métrica  $g^{\mu\nu}$ .<sup>7</sup> Todas essas identidades aplicadas na Eq. (47) levam a

$$\begin{aligned}N &= \bar{u}(p')[(2-d)l^\mu l^\nu - 2m^2 \gamma^\mu + 4m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \\ &\quad - 2(-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) + (4-d)K(l)]u(p),\end{aligned}\tag{53}$$

no qual  $K(l)$  representa um conjunto de fatores proporcionais a  $(4-d)$ , que serão anulados quando tomado o limite  $d \rightarrow 4$ , e, portanto, iremos desprezá-lo daqui em diante. Nesse passo da simplificação, é interessante utilizar os resultados da equação de Dirac<sup>7</sup>

$$\not{p}u(p) = mu(p), \quad \bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p'), \quad \bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0,\tag{54}$$

que nos permitem substituir os momentos  $p$  e  $q$  em termos da massa  $m$ . Além disso, é importante que possamos obter do numerador os fatores de forma  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  introduzidos na seção anterior, e para isso aplicamos as identidades de Ward (34) e de Gordon (37), a fim de obter uma expressão em função de  $\gamma^\mu$  e  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . Através de todas as simplificações mencionadas, obtemos a

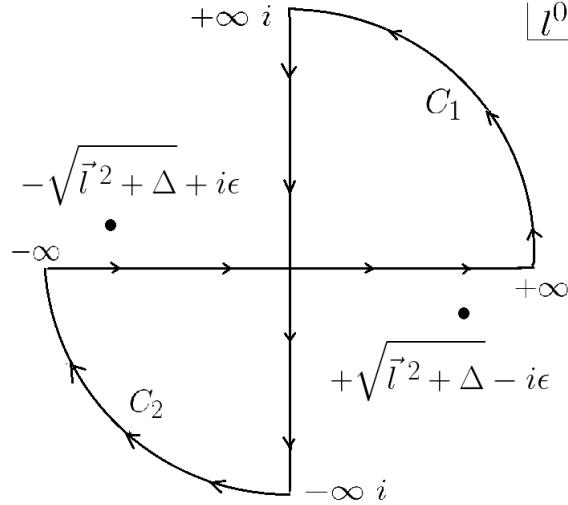


Figura 4 – Contorno de integração em  $l^0$ , que permite a Rotação de Wick.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

integral em (42) como sendo

$$\delta\Gamma^\mu(p', p) = \mu^{(4-d)/2} 2ie^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{2}{D^3} \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \times \left( -\frac{(d-2)^2}{2d} l^2 + \frac{(6-d)}{2} (1-x)(1-y) q^2 + \frac{(d-2)}{2} (1-z)^2 m^2 - 2m^2 z \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \right] u(p), \quad (55)$$

onde adicionamos à expressão um parâmetro escalar de energia  $\mu^{(4-d)/2}$ , que será necessário para manter algumas expressões matemáticas adimensionais em nossos resultados, como será enfatizado em breve.<sup>10</sup>

O próximo passo é efetuar a integração em  $d^d l$  na métrica de Minkowski para o espaço-tempo plano em  $d$  dimensões. Entretanto, é muito mais simples realizar essa integração em um espaço com métrica euclideana, o que possibilita a utilização das coordenadas hiperesféricas  $d$  dimensionais usuais. Felizmente, isso é possível através de um truque conhecido como Rotação de Wick. Pela localização dos polos da equação (55), a integração pelo contorno apresentado na Figura (4) é zero, via Teorema dos Resíduos

$$\oint dl^0 f(l^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(l^0) dl^0 + \int_{+\infty}^{-i\infty} f(l^0) dl^0 + \int_{C_1} f(l^0) dl^0 + \int_{C_2} f(l^0) dl^0 = 0, \quad (56)$$

e as integrais nos quartos de círculos  $C_1$  e  $C_2$  também vão a zero quando tomado  $l^0 \rightarrow \infty$ .

Portanto, de (56) retiramos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(l^0) dl^0 = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(l^0) dl^0, \quad (57)$$

mostrando que as integrais no eixo real e complexo são equivalentes. Então, tomando o lado direito da Eq. (57) e fazendo a mudança de variável

$$dl^0 \equiv i dl_E^0, \quad d\vec{l} \equiv d\vec{l}_E, \quad (58)$$

tornamos a métrica euclideana

$$ds^2 = (dl^0)^2 - d\vec{l}^2 \Rightarrow -ds^2 = (dl_E^0)^2 + d\vec{l}_E^2, \quad (59)$$

facilitando a escolha de um sistema de coordenadas e simplificando o processo de integração.<sup>8</sup>

A expressão (55), agora em  $l_E$ , passa a ser

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) = \mu^{(4-d)/2} 2e^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{dl_E}{(2\pi)^d} \frac{2}{D_E^3} \bar{u}(p') \Big[ & \gamma^\mu \times \\ & \left( \frac{(d-2)^2}{2d} l_E^2 + \frac{(6-d)}{2} (1-x)(1-y)q^2 + \frac{(d-2)}{2} (1-z)^2 m^2 - 2m^2 z \right) \\ & + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(1-z)) \Big] u(p), \end{aligned} \quad (60)$$

onde o denominador também sofre modificações para

$$D_E = l_E^2 + \Delta + i\epsilon. \quad (61)$$

Em seguida, precisamos efetuar a integração do momento  $l_E$ . São duas integrais que temos que resolver, sendo a primeira

$$I_1 = \mu^{(4-d)/2} \int \frac{dl_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^3} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d+1}}{(l_E^2 + \Delta)^3}, \quad (62)$$

na qual a primeira integral ao lado direito é feita sobre o ângulo sólido em  $d$  dimensões. Esse resultado pode ser obtido através do truque<sup>7</sup>

$$(\sqrt{\pi})^d = \int dx^d \exp \left( -\sum_i^d x_i^2 \right) = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2}, \quad (63)$$

que, usando a definição de função Gama, implica na área de uma esfera de raio unitário

$d$ -dimensional como sendo

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (64)$$

Já o segundo termo na Eq. (62) pode ser resolvido através da substituição

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d+1}}{(l_E^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E^2) \frac{(l_E^2)^{\frac{d}{2}}}{(l_E^2 + \Delta)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx (1-x)^{d/2} x^{1-d/2}, \quad (65)$$

na qual  $x = \Delta/(l_E^2 + \Delta)$  e usando a definição da função Beta<sup>7</sup>

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (66)$$

encontramos o resultado em  $d$  dimensões para a integral (62)

$$I_1 = \mu^{(4-d)/2} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^3} = \mu^{(4-d)/2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}. \quad (67)$$

Note que a expressão (67) possui um polo simples na função  $\Gamma(2 - d/2)$  em  $d = 4$ . Nossa resultado, portanto, apresenta uma divergência exatamente no limite que desejamos, como era esperado pelos comentários feitos anteriormente que ligam a divergência à dimensão do espaço de integração. A grande contribuição do método da Reg.Dim. consiste em permitir a substituição  $d = 4 - 2\epsilon$ , de forma que reescrevemos a Eq. (67) como

$$I_1 = \mu^\epsilon \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^3} = \mu^\epsilon \frac{(2-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^\epsilon, \quad (68)$$

e no limite  $d \rightarrow 4$  desejado, possibilita a expansão do resultado em torno de  $\epsilon = 0$ . Usando a aproximação, em primeira ordem para a função  $\Gamma(x)$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (69)$$

onde  $\gamma = 0.577215665$  é a constante de Euler-Mascheroni, obtemos o resultado para Eq. (62) como

$$I_1 = \mu^{(4-d)/2} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^3} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \log\left(\frac{4\pi\mu}{\Delta} e^{-\gamma}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \quad (70)$$

em que isolamos toda a divergência da integral em um termo  $1/\epsilon$  quando tomado  $\epsilon \rightarrow 0$ . Note a importância da escala de energia  $\mu$  que adicionamos à integral anteriormente: ela é responsável por manter o argumento do logaritmo adimensional, já que  $\Delta$  tem dimensão de energia (massa).

A segunda integral que precisamos determinar na Eq. (60) pode ser calculada usando os

mesmos procedimentos<sup>7</sup>

$$I_2 = \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^3} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta}, \quad (71)$$

que, felizmente, não tem divergências.

Com esses resultados para a integração em  $d^d l_E$  de  $I_1$  e  $I_2$ , com  $d \rightarrow 4$ , obtemos a expressão para correção de um *loop* do vértice do mísion como

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \bar{u}(p') \left[ \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \left( \frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z) \right) \right. \\ & \left. + \gamma^\mu \left( \frac{1}{\epsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu}{\Delta} e^{-\gamma} \right) + \frac{1}{\Delta} ((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) \right) \right] u(p), \end{aligned} \quad (72)$$

escrita agora em termos da constante de estrutura fina  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137.036 \approx 0.007297$ .<sup>11</sup>

Da expressão na Eq. (72), podemos identificar os fatores de forma de acordo com a Eq. (38) como

$$\begin{aligned} F_1(q^2) = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \left[ \frac{1}{\epsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu}{\Delta} e^{-\gamma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta} ((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2) \right], \end{aligned} \quad (73)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2m^2 z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xyq^2}, \quad (74)$$

e notamos que a divergência se encontra apenas no fator  $F_1(q^2)$ , o qual por construção deveria ter valor fixado 1. Mas isso não é um problema: o procedimento de renormalização, que está fora do escopo deste trabalho, elimina esta divergência.<sup>7</sup> De qualquer modo, o resultado que nos interessa depende apenas de  $F_2(q^2)$ , que é finito.

Podemos então calcular, agora tomando  $q^2 = 0$ ,

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2z}{(1-z)} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (75)$$

concluindo que a primeira correção na QED, em ordem  $\alpha$ , para o momento magnético anômalo do mísion é

$$a_\mu \equiv \frac{g_\mu - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00116140973, \quad (76)$$

o famoso resultado de Julian Schwinger para correção de ordem  $\alpha$  em  $g_\mu - 2$ , no contexto da QED,<sup>2</sup> que foi comprovado experimentalmente por Kusch e Foley em 1948, encontrando, na ocasião para o elétron,  $a_e = (0.00119 \pm 0.00005)$ ,<sup>3</sup> validando o resultado da Eq. (76), dentro da incerteza do experimento. Esse resultado à época, demonstrou a capacidade da Teoria Quântica

de Campos, e em particular a Eletrodinâmica Quântica, ainda em seus primeiros anos, em efetuar cálculos com grande precisão para importantes observáveis da física. Além disso, mostra que apesar de existirem divergências na teoria, ela é capaz de produzir resultados finitos para tais observáveis e que estão de acordo com as observações experimentais.

## 5 Conclusão

O objetivo desse trabalho foi obter o resultado clássico para  $g_\mu = 2$ , proveniente da equação de Dirac, e a primeira correção em  $g_\mu - 2$  dentro do escopo da TQC, mais especificamente na QED, da troca de fótons virtuais.

Primeiramente, tomando o limite não relativístico (onde a energia de repouso é muito maior que a energia cinética da partícula), resolvemos a equação de Dirac, com a substituição de acoplamento mínimo. Com isso, vemos que a equação para os bi-espinores, associados ao ansatz da Eq. (8), nada mais é do que a Hamiltoniana de Pauli, que descreve a interação de uma partícula carregada com o campo eletromagnético na Mecânica Quântica Não Relativística. Assim, compara-se, naturalmente, o resultado obtido com o esperado clássico, encontrando  $g_\mu = 2$  como uma previsão direta do tratamento do problema na MQR.

Em seguida, dentro do formalismo da QED, mostramos que os diagramas de *loop* produzem as correções provenientes da Eletrodinâmica Quântica para  $g_\mu - 2$ , através do cálculo dos chamados Fatores de Forma. Mostramos também que a correção para o momento magnético anômalo do mûon provém apenas do fator de forma  $F_2(0)$ , quando estudada a interação dos mûons com o fôton externo na camada de massa,  $q^2 = 0$ . Através das Regras de Feynman da QED, calculamos as amplitudes dos processos para os diagramas de vértices do mûon. Utilizamos procedimentos consagrados da TQC para resolver a integral de *loop*, como a Parametrização de Feynman e a Rotação de Wick. Para tratar a divergência associada a integral do processo estudado, foi adotado o método da Regularização Dimensional, que consiste em interpretar a divergência associada às dimensões do espaço de integração. O procedimento isolou a divergência em um polo simples em  $\epsilon = 0$ , que felizmente não está presente no fator de forma  $F_2(q^2)$ . Calculamos então  $a_\mu = F_2(q^2 = 0) = \alpha/2\pi$ , a correção de um *loop* na QED para o momento magnético anômalo do mûon.

No geral, o presente trabalho mostrou o poder da Mecânica Quântica Relativística e da Teoria Quântica de Campos, em particular a QED, em obter resultados fantásticos para observáveis importantes da física, que, inclusive atualmente, desempenham um papel crucial na validação do Modelo Padrão da física de partículas e na busca por física além do SM.

# Referências

- <sup>1</sup> DIRAC, P. A. M. The quantum theory of electron, 2. *Proceedings of the Royal Society London A*, v. 118, n. 778, 1928. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- <sup>2</sup> SCHWINGER, J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, v. 73, n. 4, p. 416–417, 1948.
- <sup>3</sup> KUSCH, P.; FOLEY, H. M. The magnetic moment of the electron. *Physical Review*, v. 74, n. 3, p. 250, 1948.
- <sup>4</sup> ABI, B. et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letters*, v. 126, n. 14, p. 141801, 2021.
- <sup>5</sup> GREINER, B. M. W.; RAFELSKI, J. *Quantum electrodynamics of strong fields*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- <sup>6</sup> PICH, A. *The standard model of electroweak interactions*. 2012. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/1411131/files/1.pdf>. Acesso em: 30 out. 2022.
- <sup>7</sup> PESKIN, M.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. USA: Westview Press, 1995.
- <sup>8</sup> SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- <sup>9</sup> 't HOOFT, G.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, v. 44, n. 1, p. 189–213, 1972.
- <sup>10</sup> JAMIN, M. *QCD and renormalisation group methods*. Spain: Universitat Autònoma de Barcelona, 2006.
- <sup>11</sup> WORKMAN, R. et al. *Particle data group. Progress of Theoretical and Experimental Physics*, v. 2022, n. 8, p. 083C01, 2022.